Câu hỏi

Trong $\mathbb{R}^3$, giả sử hai mặt cong S_1 và S_2:

- Có cùng đường biên.
- Có cùng hướng trên biên.

Với một trường vector $\vec{F}$ trơn bất kỳ trên cả hai mặt, hỏi:

$$\iint_{S_1} \vec{F} \cdot d\vec{S} \quad \text{có luôn bằng} \quad \iint_{S_2} \vec{F} \cdot d\vec{S} \ ?$$

Trả lời ngắn gọn

Không. Hai tích phân mặt chỉ bằng nhau khi

$$\nabla \cdot \vec{F} = 0 \quad \text{trong miền giữa } S_1 \text{ và } S_2.$$

Phần 1 — Đây là câu hỏi về định lý nào?

Định lý Stokes trong $\mathbb{R}^3$.

Phát biểu Stokes:

$$\iint_S (\nabla \times \vec{F}) \cdot d\vec{S} = \oint_{\partial S} \vec{F} \cdot d\vec{r}.$$

Quan trọng: tích phân mặt của curl bằng tích phân đường trên biên.

Phần 2 — Áp dụng Stokes cho S_1 và S_2

Vì S_1 và S_2 có cùng biên, cùng hướng trên biên:

$$\oint_{\partial S_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \oint_{\partial S_2} \vec{F} \cdot d\vec{r}.$$

Do đó:

$$\iint_{S_1} (\nabla \times \vec{F}) \cdot d\vec{S} = \iint_{S_2} (\nabla \times \vec{F}) \cdot d\vec{S}.$$

Chú ý: Stokes không nói gì về $\iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S}$.

Phần 3 — Xét hiệu hai tích phân cần so sánh

$$\iint_{S_1} \vec{F} \cdot d\vec{S} - \iint_{S_2} \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iint_{S_1 - S_2} \vec{F} \cdot d\vec{S}.$$

$S_1 - S_2$ tạo thành một mặt kín, gọi là Σ.

Phần 4 — Dùng định lý Gauss (Divergence)

Định lý Gauss:

$$\iint_{\Sigma} \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iiint_{V} (\nabla \cdot \vec{F})\, dV.$$

Suy ra:

$$\iint_{S_1} \vec{F} \cdot d\vec{S} - \iint_{S_2} \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iiint_{V} (\nabla \cdot \vec{F})\, dV.$$

Phần 5 — Khi nào hai tích phân bằng nhau?

Hai tích phân bằng nhau khi và chỉ khi:

$$\nabla \cdot \vec{F} = 0 \quad \text{trong } V.$$

Ví dụ: trường không nguồn, trường solenoidal, trường từ trong vật lý.

Phần 6 — Vì sao đề nhấn mạnh "trường bất kỳ"?

Nếu là trường bất kỳ, divergence không bằng 0, tích phân phụ thuộc mặt. Không thể bằng nhau một cách tổng quát.

Tóm tắt bản chất

Câu hỏi	Trả lời
Cùng biên $\to$ cùng tích phân mặt?	Không
Cùng biên $\to$ cùng tích phân curl?	Có
Điều kiện để bằng nhau	$\nabla \cdot \vec{F} = 0$
Định lý chi phối	Gauss
Ý đồ đề	Phân biệt Stokes vs Gauss

Câu trả lời chuẩn để viết vào bài thi

Không. Hai tích phân mặt không nhất thiết bằng nhau. Chúng chỉ bằng nhau nếu $\nabla \cdot \vec{F} = 0$ trong miền kẹp giữa hai mặt. Nói chung, tích phân mặt của $\vec{F}$ phụ thuộc vào mặt, không chỉ phụ thuộc vào biên.